

תורת הקבוצות, תרגיל 10

בתרגיל זה מותר להשתמש באקסיומת הבחירה אולם עליכם לציין במפורש כל פעם שאתם משתמשים בה.

1. תהיינה I, J קבוצות זרות. נתבונן בקבוצות העוצמות $\{a_i : i \in I\}$ ו- $\{a_j : j \in J\}$. הוכח, כי מתקיים $\sum_{k \in (I \cup J)} a_k = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{j \in J} a_j$.

2. תהיינה $\{a_i : i \in I\}$ ו- $\{b_i : i \in I\}$ קבוצות של עוצמות כך שלכל i מתקיים $a_i \leq b_i$. הוכח, כי מתקיים $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$.

3. תהי $\{a_n : n \in \mathcal{N}\}$ קבוצת עוצמות כך, שלכל n מתקיים $a_n \leq 2^{\aleph_0}$.

א. מהו הערך המירבי האפשרי של המכפלה $\prod_{n \in \mathcal{N}} a_n$?

ב. בהנחה, שכל a_n הינה סופית או שווה לאחת העוצמות $2^{\aleph_0}, \aleph_0$, קבע באילו מקרים הערך המירבי של המכפלה מתקבל. (הקפד לתת תאור מדוייק של כל המקרים הללו).

4. תהיינה a, b עוצמות כך, ש- $a < b$ ותהי B קבוצה שעוצמתה b . הוכח, כי ניתן לחלק את B ל- a קבוצות חלקיות זרות, כלומר ניתן לרשום $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ כאשר A_i זרות בזוגות ו- $|I| = a$.

5. (רשות) מהי עוצמת קבוצת הפונקציות $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ להן יש קבוצה בת מניה בלבד של נקודות אי רציפות?

תאריך ההגשה: 29.12.2004